

1. Étudier les variations de la fonction f définie, pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, par $f(x) = \ln(x) - x + 1$.

2. a. En déduire que pour tout $x \in]0 ; +\infty[$:

$$\ln(x) \leq x - 1.$$

b. Démontrer alors que pour tout $x \in]0 ; +\infty[$:

$$\frac{1}{2} \ln(x) \leq \sqrt{x} - 1.$$

c. Justifier enfin que pour tout $x \in]1 ; +\infty[$:

$$0 < \frac{\ln(x)}{x} \leq \frac{2(\sqrt{x} - 1)}{x}.$$

3. En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.